Κανονες του L'Hôspital

1) Εστω $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ με φ, ψ συνεχής και $\exists \varphi'(x_0), \psi'(x_0) \neq 0$

τοτε αναζητώντας το οριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}$$

2) Εστω φ και ψ εχουν όρια: $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 0$

και υπάρχει περιοχή του x_0, V_{x_0} ωστε $\exists \varphi'(x), \psi'(x)$

και $\forall x \in V_{x_0}$ & $\lim_{x \to x_0} \psi'(x) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}$$

Ακριβως τα δύο κριτήρια αυτά ισχυουν και στις μιγαδικες συναρτήσεις

Πχ

Έστω $f(z)=\dfrac{z^2-z}{z-1}$ και αναζητούμε το: $\lim_{z\to 1} f(z)$

τότε $\lim_{z\to 1}\dfrac{z^2-z}{z-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 1}\dfrac{2z-1}{1}=1$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CAUCHY-RIEMANN

Όταν h κινείται κατά μήκος του Re

τότε $h=t,\ t\in\mathbb{R}$

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=f(x,y)$

τότε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{} f_x(x_0,y_0)$$

Όταν h κινείται κατά μήκος του Im

τότε $h=i\cdot t,\ t\in\mathbb{R}$ και τότε $z_0+h'=x_0+i(y_0+t)$

$$\frac{f(z_0+h')-f(z_0)}{h'}=\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{it}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{1}{i}f_y(x_0,y_0)=-i f_y(x_0,y_0)$$

Αλλά, η f είναι παραγωγίσιμη άρα

$f_x(x_0,y_0)=-i f_y(x_0,y_0) \Rightarrow \boxed{f_y(x_0,y_0)=i f_x(x_0,y_0)}$ ⊛

Αναλυτικότερα:

$f_x=u_x+iv_x$ και $f_y=u_y+iv_y$

Έτσι, από την ⊛:

$u_y+iv_y=i(u_x+iv_x)=-v_x+iu_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_y=-v_x \\ v_y=u_x \end{array}\right|$, εξισώσεις Cauchy-Riemann

χρήσιμες για να διαπιστώσουμε αν μια παράγωγος υπάρχει (αν δεν υπάρχουν $\Rightarrow$ δεν υπάρχει παράγωγος)

Πχ

$z=x+iy$, $f(z)=y^2+ix$

αναζητούμε σημεία του $\mathbb{C}$ που η f παραγωγίζεται

Έχουμε $u(x,y)=y^2$ και $v(x,y)=x$

$u_x=0$, $u_y=2y$, $v_x=1$, $v_y=0$

Ισχύει:

$u_x=v_y \Rightarrow 0=0$ και $u_y=-v_x \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

Άρα, $z=x-\frac{1}{2}i$, $x\in \mathbb{R}$ (ενδέχεται να παραγωγίζεται)

Θα πάρουμε το πηλίκο διαφορών

$h=a+ib$, $z_0+h=x+a+i(b-\frac{1}{2})$ άρα:

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{(b-\frac{1}{2})^2+i(x+a)-(-\frac{1}{2})^2-ix}{a+ib}=$$

$$=\frac{b^2-b+\frac{1}{4}+ix+ia-\frac{1}{4}-ix}{a+ib}=\frac{b^2-b+ia}{a+ib}\xrightarrow[b\to 0]{(a,b)\to(a,0)}\frac{ia}{a}\xrightarrow[a\to 0]{} i \;;;$$

$$\frac{b^2-b+ia}{a+ib}-i=\frac{b^2-b+ia-ia+b}{a+ib}=\frac{b^2}{a+ib}$$

όπου $\left|\frac{b^2}{a+ib}\right|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\sqrt{a^2+b^2}=|h|\xrightarrow{h\to 0}0$

ΕΥΧΡΗΣΤΟΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ ΣΥΝΘΗΚΩΝ CAUCHY-RIEMANN

$z=x+iy$

$f(z)=f(x+iy)=f(x,y)=f\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{i2}\right)=f(z,\bar z)$

$\bar z=x-iy$

$x=\frac{z+\bar z}{2}$ και $y=\frac{z-\bar z}{2}$

Έτσι, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=f_x\cdot\frac{1}{2}+f_y\left(-\frac{1}{2i}\right)=\frac{1}{2}(f_x+if_y)\overset{*}{=}0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0}$$

Πχ

$f(z)=|z|^2=z\cdot\bar z$

$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=z=0 \rightarrow$ Άρα, πρέπει $z=0$

Εξετάζουμε αν $\exists$ παράγωγος στο 0

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{z\bar z}{z}=\bar z\longrightarrow 0$$

$u_x=0$, $u_y=2y$, $v_x=1$, $v_y=0$

Ισχύει:

$u_x = v_y \Rightarrow 0=0$ και $u_y=-v_x \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

Άρα, $z=x-\frac{1}{2}i$, $x\in\mathbb{R}$ (Ενδέχεται να παραγωγίζεται)

Θα πάρουμε το πηλίκο διαφορών

$h=a+ib$, $z_0+h=x+a+i(b-\frac{1}{2})$ άρα:

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(b-\frac{1}{2})^2+i(x+a)-(-\frac{1}{2})^2-ix}{a+ib} =$$

$$= \frac{b^2-b+\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{ix}+ia-\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{ix}}{a+ib} = \frac{b^2-b+ia}{a+ib} \xrightarrow[b\to 0]{(a,b)\to(a,0)} \frac{ia}{a} \xrightarrow[a\to 0]{} i \;;;$$

$$\frac{b^2-b+ia}{a+ib}-i = \frac{b^2-\cancel{b}+\cancel{ia}-\cancel{ia}+\cancel{b}}{a+ib} = \frac{b^2}{a+ib}$$

όπου $\left|\frac{b^2}{a+ib}\right| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |h| \xrightarrow{h\to 0} 0$

ΕΥΧΡΗΣΤΟΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ ΣΥΝΘΗΚΩΝ CAUCHY-RIEMANN

$z=x+iy$

$f(z)=f(x+iy)=f(x,y)=f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{i2}\right)=f(z,\bar{z})$

$\bar{z}=x-iy$

$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ και $y=\frac{z-\bar{z}}{2}$

Έτσι, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_x\cdot\frac{1}{2}+f_y\left(-\frac{1}{2i}\right)=\frac{1}{2}(f_x+if_y) \overset{*}{=} 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0}$$

Πχ

$f(z)=|z|^2=z\cdot\bar{z}$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z = 0 \rightarrow$ Άρα, πρέπει $z=0$

Εξετάζουμε αν $\exists$ παράγωγος στο 0

$$\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \bar{z} \longrightarrow 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann και οι συναρτήσεις u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς στο z_0 τότε $\exists f'(z_0)$

$\longrightarrow$

Στις συνθήκες Riemann-Cauchy παίρναμε

$$\left.\begin{array}{l} u_{yy} = -v_{xy} \\ u_{xx} = v_{yx} \end{array}\right| \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

διότι f δύο φορές παραγωγίσιμη και η δεύτερη παράγωγος συνεχής (Θεώρημα Schwarz)

Τότε $\Delta u = 0$ & $\Delta v = 0$ (εξίσωση Laplace)

Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace θα λέγεται αρμονική. Εάν ικανοποιεί τις Cauchy-Riemann και του Laplace τότε θα λέγεται συζυγής-αρμονική

Πχ

Έστω συνάρτηση $u(x,y) = x^2 - y^2$ αποτελεί πραγματικό μέρος τυχούσας f συνάρτησης; Ποια η f;

ΛΥΣΗ

$u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2 \Rightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow$ Αρμονική

Επίσης,
$$\left.\begin{array}{l} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{array}\right| \Rightarrow v(x,y) = c + \int_{x_0}^{x} v_x(s,y)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x,y) = c + \int_{x_0}^{x} 2y\,dy = 2xy + c(y)$$

Όμως, $2x = 2x + c'(y) \Rightarrow c(y) = \text{σταθ.}$

και $v(x,y) = 2xy + \text{σταθ}$

Συνεπώς,

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + \text{σταθ}) = z^2 + i\cdot\text{σταθ.}$$

Πχ

Έστω $|f(z)|=1$. Ποια η συνάρτηση f;

ΛΥΣΗ

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y) \Rightarrow u^2+v^2=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u\cdot u_x+v\cdot v_x=0 \\ u\cdot u_y+v\cdot v_y=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u u_x - v u_y=0 \\ u u_y + v u_x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u u_x - v u_y=0 \\ v u_x + u u_y=0 \end{array}\right|$$

όπου $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2+v^2 \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow u=v=0 \rightsquigarrow f(z)=0 \\ =0 \Rightarrow u,v=\text{σταθ} \rightsquigarrow f(z)=a+bi \end{cases}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν η f παραγωγίσιμη σε ένα τόπο τότε λέγεται ολόμορφη

Εάν η f παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{C} \Rightarrow$ f λέγεται ακέραια.

Ασκήσεις:

1) Νδο $\lim \frac{n-i}{n+1}=1$ με χρήση του ορισμού

ΛΥΣΗ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-i}{n+1}=1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\ \forall n\geq n_0 : \left|\frac{n-i}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{n-i}{n+1}-1\right| = \left|\frac{n-i-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \rightsquigarrow n_0=\left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right]+1$$

2) (σελ. 53 παράδειγμα 2.3.4)

Η ακολουθία $z_n=\mathrm{Arg}\,\frac{(-1)^n}{n}$, $n=1,2,\dots$ νδο δεν συγκλίνει

ΛΥΣΗ

Εάν n άρτιος $\rightarrow z_n=\mathrm{Arg}\,\frac{1}{n} \overset{\circledast}{=} 0 \rightarrow 0$

$\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+i0=\frac{1}{n}(\cos 0+i\sin 0)$ ⊛

Εάν n περιττός $\rightarrow z_n=\mathrm{Arg}\left(-\frac{1}{n}\right) \overset{\circledast\circledast}{=} \pi \rightarrow \pi$

$-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}+i0=\frac{1}{n}(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\nparallel$

Άρα, η ακολουθία z_n, $n=1,2,\dots$ δεν συγκλίνει.

3) (Παράδειγμα 2.3.5)

Ν.δ.ο. $\forall a \in \mathbb{R}$ και $\rho \in (0,1)$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\rho\cos a+\rho^2\cos(2a)+\dots+\rho^n\cos(na)\right)=\frac{1-\rho\cos a}{1-2\rho\cos a+\rho^2}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρώ $x_n = 1+\rho\cos a+\rho^2\cos(2a)+\dots+\rho^n\cos(na)$

και $y_n = \rho\sin a+\rho^2\sin(2a)+\dots+\rho^n\sin(na)$

ώστε $z_n = x_n + i y_n = 1+\rho(\cos a+i\sin a)+\dots+\rho^n(\cos(na)+i\sin(na))$

Εάν $w=\rho(\cos a+i\sin a)$ τότε

$w^2=\rho^2(\cos(2a)+i\sin(2a)), \dots, w^n=\rho^n(\cos(na)+i\sin(na))$

και άρα $z_n = 1+w+w^2+\dots+w^n = \dfrac{1-w^{n+1}}{1-w}$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-w^{n+1}}{1-w} \quad (1)$$

όπου $w^{n+1}=\rho^{n+1}(\cos((n+1)a)+i\sin((n+1)a)) =$

$= \rho^{n+1}\cdot\cos((n+1)a)+i\rho^{n+1}\sin((n+1)a)$

όπου $\rho^{n+1}\to 0$ αφού $\rho\in(0,1)$

και $\rho^{n+1}\cos((n+1)a)\to 0$ και $\rho^{n+1}\sin((n+1)a)\to 0$

όπως μηδενικές επί φραγμένες. Συνεπώς, $w^{n+1}\to 0$

Άρα, η (1) γίνεται

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-w^{n+1}}{1-w}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-w}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\rho\cos a-i\rho\sin a}=$$

$$=\frac{1-\rho\cos a+i\rho\sin a}{(1-\rho\cos a)^2+\rho^2\sin^2 a}=\frac{1-\rho\cos a+i\sin a}{1-2\rho\cos a+\rho^2\cos^2 a+\rho^2\sin^2 a}=$$

$$=\frac{1-\rho\cos a+i\sin a}{1-2\rho\cos a+\rho^2}.$$

όπως $\lim x_n = Re\left(\dfrac{1}{1-w}\right)=\dfrac{1-\rho\cos a}{1-2\rho\cos a+\rho^2}$

4) (σελ. 93 παράδειγμα 4.1.1)

Η εικόνα του τόπου $K=\{z: |Rez|>|Im z|\}$ μέσω της $f(z)=z^2$ είναι το σύνολο $K^*=\{w: Re w>0\}$

ΛΥΣΗ

Θδο $f(K)=K^*$

Έστω $w\in f(K) \Rightarrow \exists z\in K: f(z)=w$

και θέλω νδο $Re(w)>0$

$\left.\begin{matrix} z\in K \\ z=x+iy \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x|>|y|$ όμως $f(z)=w \Rightarrow z^2=w \Rightarrow x^2-y^2+i2xy=w$

Υποθέτουμε ότι $w=u+iv$ με $u=x^2-y^2$ και $v=2xy$

όπου $u>0$ (διότι $z\in K \Rightarrow |x|>|y| \Rightarrow x^2>y^2$)

Άρα, $Re w=u>0 \Rightarrow w\in K^* \Rightarrow f(K)\subseteq K^*$ ①

Από την άλλη μεριά, έστω $w\in K^* \Rightarrow Re w>0$

όπου αν $w=u+iv$ τότε το $u>0$

Θδο $w\in f(K) \Rightarrow (\exists z\in K): f(z)=w$

Έτσι, δεδομένου $f(z)=w \Rightarrow z^2=w$ αναζητώ ένα τέτοιο z που ανήκει στο K. Έτσι, αν $z=x+iy$ τότε

$z^2=w \Rightarrow x^2-y^2+i2yx=w \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$

1η περ.: $v=0 \Rightarrow 2xy=0 \xrightarrow[\Rightarrow x^2>y^2 \Rightarrow |x|>|y|]{u>0 \Rightarrow x^2-y^2>0 \Rightarrow} y=0$ ($x=0$ Απορ.)

τότε $u=x^2-y^2 \overset{y=0}{=} x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow u=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{u}$

Τότε, $z=\pm\sqrt{u}+i0 \in K$ με $|x|=\sqrt{u}>0=|y|$

2η περ.: $v\neq 0$.

$v=2xy \Rightarrow y=\frac{v}{2x}$

Αντικαθιστώ στην σχέση: $u=x^2-y^2 \Rightarrow u=x^2-\left(\frac{v}{2x}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow u=x^2-\frac{v^2}{4x^2} \Rightarrow 4x^4-4ux^2-v^2=0$

με $\Delta=16u^2+16v^2=16(u^2+v^2)=16|w|^2$

$x_{1,2}^2=\frac{4u\pm4|w|}{2\cdot4}=\frac{u\pm|w|}{2}$ ↗ $\frac{u+|w|}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{u+|w|}{2}}$ ↘ $\frac{u-|w|}{2}<0$ Απορ.

πολ/ζω $\sqrt{|w|-u}$

όπως, $y = \frac{v}{2x} = \pm \frac{v}{2\sqrt{\frac{u+|w|}{2}}} = \pm \frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{|w|-u}{2}}$

$$z = \pm\sqrt{\frac{u+|w|}{2}} \pm i\,\frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{|w|-u}{2}} \in K$$

διότι $|x| = \sqrt{\frac{u+|w|}{2}} > |y| = \sqrt{\frac{|w|-u}{2}}$, $u>0$

άρα $K^* \subseteq f(K)$